MACIERZE LOSOWE
LISTA 4
Gaussowskie macierze losowe

1. Niech $X = (X_{i,j})$ będzie $n \times n$ macierzą losową, w której

   (a) $X_{i,j} = X_{j,i}$ dla każdego $1 \leq i, j \leq n$,
   (b) $X_{j,j} \sim N(0, 2/n)$ dla każdego j,
   (c) $X_{i,j} \sim N(0, 1/n)$ dla każdego $i < j$,

   oraz wszystkie zmienne z (b) i (c) są niezależne. Zazwyczaj nazywa się ją w skrócie GOE (*Gaussian Orthogonal Ensemble*). Traktując ją jako wektor losowy w $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ postaci

   $$(X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}, X_{1,2}, \ldots, X_{1,n}, X_{2,3}, \ldots, X_{2,n}, \ldots, X_{n-1,n})$$

   wyprowadzić następujący wzór na gęstość rozkładu łącznego elementów tej macierzy względem miary Lebesgue'a:

   $$d\mu(X) = c_n \exp(-\frac{n}{4}\mathrm{Tr}(X^2)) \prod_{i \leq j} dX_{i,j}$$

   gdzie c_n jest stałą (to nie jest liczba Catalana). Wyznaczyć tę stałą. W szczególności, w przypadku $n = 2$ mamy rzeczywisty losowy wektor Gaussowski postaci $(X_{1,1}, X_{2,2}, X_{1,2})$, od którego można zacząć i potem uogólnić do dowolnego n.

2. Sprawdzić, że rozkład łączny macierzy GOE nie zależy od wyboru bazy ortogonalnej, tzn. dla dowolnej macierzy ortogonalnej O wymiaru $n \times n$, rozkład macierzy X (takiej jak w poprzednim zadaniu) jest taki sam jak rozkład macierzy $O^T X O$ (z tej niezmienniczości pochodzi nazwa GOE)

3. Niech $A = (A_{i,j})$ będzie zespoloną $n \times n$ macierzą losową, w której

   (a) $A_{i,j} = X_{i,j} + iY_{i,j} = \overline{A_{j,i}} = X_{j,i} - iY_{j,i}$ dla każdego $1 \leq i, j \leq n$,
   (b) $X_{j,j} \sim N(0, 2/n)$ dla każdego j

   (c) $X_{i,j}, Y_{i,j} \sim N(0, 1/n)$ dla każdego $i < j$,

   oraz wszystkie zmienne z (b) i (c) są niezależne. Zazwyczaj nazywa się ją w skrócie GUE (*Gaussian Unitary Ensemble*). Traktując ją jako wektor losowy w $\mathbb{R}^{n^2}$ postaci

   $$(X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}, X_{1,2}, \ldots, X_{1,n}, \ldots, X_{n-1,n}, Y_{1,2}, \ldots, Y_{1,n}, \ldots, Y_{n-1,n})$$

   wyprowadzić następujący wzór na gęstość rozkładu łącznego elementów tej macierzy względem miary Lebesgue'a:

   $$d\mu(A) = d_n \exp(-\frac{n}{2}\mathrm{Tr}(X^2)) \prod_{i \leq j} dX_{i,j} \prod_{i<j} dY_{i,j},$$

   gdzie d_n jest stałą. Wyznaczyć tę stałą. W szczególności, w przypadku $n = 2$ mamy rzeczywisty losowy wektor Gaussowski postaci $(X_{1,1}, X_{2,2}, X_{1,2}, Y_{1,2})$.

4. Sprawdzić, że rozkład łączny macierzy GUE nie zależy od wyboru bazy ortogonalnej, tzn. dla dowolnej macierzy unitarnej U wymiaru $n \times n$, rozkład macierzy X (takiej jak w poprzednim zadaniu) jest taki sam jak rozkład macierzy U^*XU (z tej niezmienniczości pochodzi nazwa GUE).

5. Niech
$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$
będzie dowolną rzeczywistą macierzą symetryczną.

   (a) Wyrazić wartości własne λ_1, λ_2 tej macierzy przy pomocy a, b, c.

   (b) Zapisując macierz wektorów własnych w postaci
   $$P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
   wyznaczyć a, b, c przy pomocy $\lambda_1, \lambda_2, \varphi$.

   (c) Pokazać, że Jakobian przekształcenia zmiennych z (a, b, c) na $(\lambda_1, \lambda_2, \varphi)$ jest równy
   $$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial b}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial c}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial a}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial b}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial c}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial a}{\partial \varphi} & \frac{\partial b}{\partial \varphi} & \frac{\partial c}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \lambda_1 - \lambda_2$$

6. Zastosować zadanie 5 do symetrycznych Gaussowskich macierzy rzeczywistych $X = (X_{i,j})$ o wymiarze 2×2:

   (a) uzasadnić, że gęstość rozkładu prawdopodobieństwa macierzy X wyraża się w zmiennych $(\lambda_1, \lambda_2, \varphi)$ wzorem
   $$d\mu(X) = g(X_{1,1}, X_{2,2}, X_{1,2})dX_{1,1}dX_{2,2}dX_{1,2} = q(\lambda_1, \lambda_2, \varphi)d\lambda_1 d\lambda_2 d\varphi$$
   gdzie
   $$q(\lambda_1, \lambda_2, \varphi) = c_2 e^{-1/2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}|\lambda_1 - \lambda_2|$$
   oraz funkcja g jest funkcją gęstości otrzymaną w zadaniu 1.

   (b) Zaobserwować, że wykorzystując nowe zmienne możemy napisać nastepujący wzór całkowy na wartość oczekiwaną funkcji mierzalnych zmiennych λ_1, λ_2:
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(\lambda_1, \lambda_2)) &= \iiint f(\lambda_1, \lambda_2) q(\lambda_1, \lambda_2, \varphi) d\lambda_1 d\lambda_2 d\varphi \\ &= c_2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \iint_{\lambda_1 < \lambda_2} f(\lambda_1, \lambda_2) e^{-1/2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} |\lambda_1 - \lambda_2| d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned}$$

Romuald Lenczewski